Leçon n° 149 : Déterminant. Exemples et applications.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

I/ Notions de déterminant.

A/ Des formes multilinéaires au déterminant. [G]

Définition 1 : Forme p-linéaire et espace $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$.

Définition 2 : Formes alternées ($\mathcal{A}_p(E, \mathbb{K})$) et antisymétriques.

Théorème 3 : En $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, une forme est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.

Corollaire 4 : Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille liée, alors $f(x_1, \ldots, x_p) = 0$.

Théorème 5 : $\dim(\mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})) = 1$, on définit le déterminant d'une base et l'expression du déterminant pour une famille de vecteurs quelconque.

Proposition 6 : Changement de base.

Théorème 7 : Une famille est liée si et seulement si son déterminant est nul.

B/ Déterminant d'une matrice carrée, d'un endomorphisme. [G]

Définition 8 : Définition du déterminant d'une matrice.

Proposition 9 : Propriétés du déterminant d'une matrice.

Définition 10 : Définition du déterminant d'un endomorphisme indépendant du choix de la base.

Remarque 11 : Lien entre le déterminant d'un endomorphisme et d'une matrice : $\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$.

Remarque 12 : On peut définir le déterminant dans un anneau intègre quelconque en passant dans le corps de fractions.

C/ Propriétés analytiques et topologiques. [PGCD] [G]

Proposition 13 : Le déterminant est une application polynomiale donc C^∞.

Corollaire 14 : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est fermé.

Développement 1

Proposition 15 : Différentielle du déterminant sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$: $d_M(\det)(H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(M)H)$.

Application 16 : Les éléments de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont les éléments de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ de norme 2 minimale.

II/ Méthodes de calcul du déterminant.

A/ Mineurs, cofacteurs. [G]

Définition 17 : Mineurs.

Proposition 18 : Développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Définition 19 : Commatrice.

Proposition 20 : Relation : $A^t\mathrm{Com}(A) = \det(A) I_n$.

Corollaire 21 : Si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^t\mathrm{Com}(A)$.

Application 22 : $A \mapsto A^{-1}$ est continue. (fraction rationnelle en les coefficients)

B/ Cas simple, pivot de Gauss. [G] [OBJ]

Exemple 23 : Cas des matrices de taille 2 et 3 (règle de Sarrus).

Proposition 24 : Matrices triangulaires par blocs.

Corollaire 25 : Les matrices triangulaires.

Application 26 : Pivot de Gauss et complexité du calcul du déterminant dans un corps.

Application 27 : Calcul du déterminant sur $\mathbb{Z}$ informatiquement : soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$, on considère $H = \max_{i,j \in [\![1,n]\!]} |m_{i,j}|$ et prenons $p_1, \dots, p_r$ des premiers distincts tels que $p_1 \dots p_r > 2n! H^n$ (de telle sorte à ce que $\det(M) < p_1 \dots p_r$), on calcule $\det(\overline{M})$ dans $\mathbb{F}_{p_i}$ pour tout i et par le théorème chinois on a donc $\det(M)$ dans $\mathbb{Z}$.

Exemple 28 : Exemple de calcul de déterminant de matrice en utilisant le pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

C/ Déterminants remarquables. [G]

Exemple 29 : Déterminant de Vandermonde.

Développement 2

Exemple 30 : Déterminant circulant.

Application 31 : Suite de polygones.

III/ Applications à d'autres domaines des mathématiques.

A/ Interprétation géométrique du déterminant. [OBJ] [FGNAlg3]

Théorème 32 : Volume et déterminant dans $\mathbb{R}^n$.

Application 33 : Volume d'un parallélépipède.

Application 34 : Volume maximal via l'inégalité de Hadamard.

Proposition 35 : Déterminant de Gram et distance à un sev.

Théorème 36 : Théorème de changement de variable.

Lemme 37 : log-convexité du déterminant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Application 38 : Ellipsoïde de John-Loewner.

B/ Résultant. [ROM] [SP]

Définition 39 : Résultant.

Théorème 40 : A et B sont premiers entre eux si et seulement si $\mathrm{Res}(A, B) \neq 0$.

Application 41 : Si $\mathbb{K}$ est un corps et $\mathbb{L}$ une extension, $\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{L},\ x \text{ algébrique sur } \mathbb{K}\}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$.

Application 42 : L'ensemble $D_n'(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables admettant n valeurs propres distinctes est ouvert.

Application 43 : Paramétrisation rationnelle du cercle.

C/ En algèbre linéaire. [ROM]

Définition 44 : Polynôme caractéristique.

Application 45 : Les valeurs propres sont les racines, $A \mapsto \chi_A$ est continue, et l'ensemble des matrices nilpotentes est fermé.

Références :

— [OBJ] Beck, Malick Peyré Objectif Agrégation p.9 et p. 181-184
— [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 581, p. 604
— [FGNAlg3] Francinou, Gianella Nicolas Algèbre 3 p. 222 et p. 229
— [SP] Saux-Picart Cours de calcul formel tome 1 p. 143-150
— [G] Gourdon Algèbre p. 134-139
— [G] Gourdon Analyse p. 321
— [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 76